Apuntes de Estadística
Versión 0.11 (Borrador)

Sucre, julio de 2008.

Capítulo 1

Probabilidad

La probabilidad y la estadística son, sin duda, las ramas de las Matemáticas que están en mayor auge en las últimas décadas, y tienen una tremenda aplicabilidad en todos los aspectos y ciencias, especialmente en las Ciencias Sociales, puesto que aquellas variables que influyen en dichas ciencias, económicas, demográficas y sociales, suelen tener carácter aleatorio, es decir, no son deterministas, y se fundamentan en predicciones a partir de datos conocidos. Todo aquello que implique predicción nos lleva al terreno de la probabilidad.

1.1. Experimentos aleatorios

En todos los aspectos de la vida a veces nos encontramos con acontecimientos predeterminados, es decir, tales que podemos decir el resultado de dichos acontecimientos antes de que finalice o incluso de que comience. Tal es el caso de:

1. Tirar una piedra desde un edificio (sabemos que se caerá).
2. Calentar una caldera con agua (sabemos que la temperatura sube).
3. Golpear una pelota (sabemos que se va a mover).

Tales acontecimientos o experimentos de los que podemos predecir el resultado antes de que se realicen se denominan experimentos deterministas. Sin embargo, analicemos otro tipo de experimentos, mucho más interesantes desde el punto de a vista matemático:

1. Lanzar un dado normal, de 6 caras y no trucado, al aire.
2. Tirar una moneda al aire y observar qué lado cae hacia arriba.
3. Jugar una partida de póquer y, en general, cualquier juego en el que intervenga el azar.

¿Podemos predecir el resultado que vamos a obtener?. Evidentemente no. Estos son experimentos no deterministas. A este tipo de experimentos, en los cuales no se puede predecir el resultado antes de realizar el experimento se les denomina experimentos aleatorios.

1.2. Definiciones básicas

La teoría de probabilidades se ocupa de asignar un cierto número a cada posible resultado que pueda ocurrir en un experimento aleatorio, con el fin de cuantificar dichos resultados y saber si un suceso es más probable que otro o relaciones parecidas. Con este fin, introduciremos algunas definiciones.

Si realizamos un experimento aleatorio, llamaremos *espacio muestral* o *universo* del experimento al conjunto de todos los posibles resultados de dicho experimento.

Al espacio muestral lo representaremos por la letra U.

Ejemplo:

Preg.- ¿Cuál es el espacio muestral asociado al experimento de lanzar un dado normal al aire y observar a la cara que queda hacia arriba?.

Resp.- En este caso hay 6 posibles resultados y el espacio muestral estará formado por:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Llamaremos *suceso aleatorio* a cualquier subconjunto del espacio muestral. Dicho de forma simple, un suceso de un experimento aleatorio es cualquier cosa que se nos ocurra afirmar sobre dicho experimento.

Así si tiramos una moneda dos veces, serían sucesos todos los siguientes:

1. Sale al menos una cara.
2. Salen más caras que cruces.
3. No sale ninguna cruz.

1.3. Definición de la probabilidad

1.3.1. Definición clásica

Supongamos que un suceso E tiene h posibilidades de ocurrir entre un total de n posibilidades, cada una de las cuales tiene la misma oportunidad de ocurrir que las demás. Entonces, la probabilidad de que ocurra E (o sea un éxito) se denota por:

$$p = Pr\{E\} = \frac{h}{n}$$

La probabilidad de que NO ocurra E (o sea un fracaso) se denota por:

$$q = Pr\{noE\} = \frac{n-h}{n} = 1 - \frac{h}{n} = 1 - p = 1 - Pr\{E\}$$

La probabilidad se encuentra en el rango de 0 y 1; donde 0 indica que el suceso nunca ocurrirá y 1 que el suceso siempre ocurrirá.

Así la probabilidad de que ocurra un suceso (p) sumada a la probabilidad de que no ocurra el mismo suceso (q) siempre es 1.

$$p + q = 1$$

Ejemplo:

Preg.- Se lanza un dado, calcular la probabilidad de obtener un 3.

Resp.-

1. Calcular el espacio muestral para el lanzamiento de un dado.

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. Sea el suceso E: Obtener un 3.

3. Calcular los casos de éxito para el suceso E.

$$E = \{3\}$$

4. Calcular el número de posibilidades de éxito (h), es decir, el número de elementos de E.

$$h = 1$$

5. Calcular el número total de posibilidades del experimento (n), es decir, el número de elementos de U.

$$n = 6$$

6. Calcular la probabilidad de obtener 3 al lanzar un dado al aire.

$$p = Pr\{E\} = \frac{h}{n} = \frac{1}{6}$$

$$p = Pr\{E\} = \frac{1}{6}$$

1.3.2. Definición como frecuencia relativa

La definición clásica de probabilidad tiene repetición de que las palabras "misma oportunidad" aparecen como sinonimias de "equiprobables", lo cual produce un círculo vicioso. Por ello, algunos autores defienden una definición estadística de probabilidad. Para ellos, la probabilidad estimada o probabilidad empírica, de un suceso se toma como la frecuencia relativa de ocurrencia del suceso cuando el número de observaciones es muy grande. La probabilidad misma es el límite de esa frecuencia relativa cuando el número de observaciones crece indefinidamente.

1.4. Probabilidad condicional

Generalmente hablando, la probabilidad condicional de un suceso E_2 dado otro suceso E_1, denotada $Pr\{E_2|E_1\}$es la probabilidad de que el suceso E_2 ocurra cuando sabemos que el suceso E_1 ocurrió. Esta es la razón por la cual se llama condicional a esta probabilidad. La probabilidad de que el suceso E_2 ocurra está condicionada por la ocurrencia de E_1. Esta información adicional sobre E_2 se incluye en el cómputo de su probabilidad condicional cuando analizamos los resultados posibles que se pueden observar cuando sabemos que E_1 ha ocurrido.

La probabilidad condicional es el cociente que se obtiene dividiendo a la probabilidad de la intersección de E_1y E_2entre la probabilidad de E_1.

$$Pr\{E_2|E_1\} = \frac{Pr\{E_2 \cap E_1\}}{E_1}$$

Ejemplo:

Preg.- En el experimento de lanzar 2 dados legales, sabiendo que la suma de los dos números es 6, calcular la probabilidad de que el primer número sea par.

Resp.-

1. Calcular el universo del experimento:

$$U = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{array} \right\}$$

2. Identificar E_1y E_2:
   E_1: La suma de los dos números es 6 (lo que sabemos).
   E_2: El primer número sea par.

3. Calcular los casos de éxito para E_1:

$$E_1 = \left\{ \begin{array}{ccccc} & & & & 1,5 \\ & & & 2,4 & \\ & & 3,3 & & \\ & 4,2 & & & \\ 5,1 & & & & \end{array} \right\}$$

4. Calcular los casos de éxito para E_2:

$$E_2 = \left\{ \begin{array}{cccccc} 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{array} \right\}$$

5. Calcular la intersección de E_1y E_2:

$$E_1 \cap E_2 = \left\{ \begin{array}{cc} & 2,4 \\ 4,2 & \end{array} \right\}$$

6. Calcular la probabilidad de E_1:

$$Pr\left\{E_1\right\} = \frac{h}{n} = \frac{5}{36}$$

7. Calcular la probabilidad de $E_1 \cap E_2$:

$$Pr\left\{E_1 \cap E_2\right\} = \frac{h}{n} = \frac{2}{36}$$

8. Calcular de que el primer número sea par al lanzar un par de dados, sabiendo que la suma es 6:

$$Pr\left\{E_2|E_1\right\} = \frac{Pr\left\{E_2 \cap E_1\right\}}{E_1} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2*36}{36*5} = \frac{2}{5}$$

1.5. Sucesos compuestos

Se llaman sucesos compuestos, a los sucesos formados por dos o más espacios muestrales; es decir, por más de un experimento.

1.5.1. Sucesos independientes

Un suceso es E_1es independiente de otro suceso E_2, si la ocurrencia del suceso E_2 no influye en la realización del evento E_1.

La probabilidad de un suceso compuesto independiente es el producto de las probabilidades individuales de los sucesos que lo forman, es decir,

$$Pr\left\{E_1E_2E_3\ldots E_n\right\} = Pr\left\{E_1\right\} * Pr\left\{E_2\right\} * Pr\left\{E_3\right\} * \ldots * Pr\left\{E_n\right\}$$

Ejemplo:

Preg.- De una baraja de 52 cartas se extraen con reposición[1] y en forma sucesiva dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos cartas sean exactamente trébol($\clubsuit$)?

Resp.-

1. Calcular el espacio muestral:

$$U = \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} A\heartsuit & 2\heartsuit & 3\heartsuit & 4\heartsuit & 5\heartsuit & 6\heartsuit & 7\heartsuit & 8\heartsuit & 9\heartsuit & 10\heartsuit & J\heartsuit & Q\heartsuit & K\heartsuit \\ A\clubsuit & 2\clubsuit & 3\clubsuit & 4\clubsuit & 5\clubsuit & 6\clubsuit & 7\clubsuit & 8\clubsuit & 9\clubsuit & 10\clubsuit & J\clubsuit & Q\clubsuit & K\clubsuit \\ A\diamondsuit & 2\diamondsuit & 3\diamondsuit & 4\diamondsuit & 5\diamondsuit & 6\diamondsuit & 7\diamondsuit & 8\diamondsuit & 9\diamondsuit & 10\diamondsuit & J\diamondsuit & Q\diamondsuit & K\diamondsuit \\ A\spadesuit & 2\spadesuit & 3\spadesuit & 4\spadesuit & 5\spadesuit & 6\spadesuit & 7\spadesuit & 8\spadesuit & 9\spadesuit & 10\spadesuit & J\spadesuit & Q\spadesuit & K\spadesuit \end{array} \right\}$$

2. Determinar E_1y E_2:
   E_1: Obtener un trébol($\clubsuit$).
   E_2: Obtener un trébol($\clubsuit$).

3. Calcular los casos de éxito para E_1:

$$E_1 = \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} A\clubsuit & 2\clubsuit & 3\clubsuit & 4\clubsuit & 5\clubsuit & 6\clubsuit & 7\clubsuit & 8\clubsuit & 9\clubsuit & 10\clubsuit & J\clubsuit & Q\clubsuit & K\clubsuit \end{array} \right\}$$

4. Calcular los casos de éxito para E_2:

$$E_2 = \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} A\clubsuit & 2\clubsuit & 3\clubsuit & 4\clubsuit & 5\clubsuit & 6\clubsuit & 7\clubsuit & 8\clubsuit & 9\clubsuit & 10\clubsuit & J\clubsuit & Q\clubsuit & K\clubsuit \end{array} \right\}$$

5. Calcular la probabilidad de E_1:

$$Pr\left\{E_1\right\} = \frac{h}{n} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

6. Calcular la probabilidad de E_2:

$$Pr\left\{E_2\right\} = \frac{h}{n} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

7. Calcular la probabilidad de obtener dos cartas de trébol en dos extracciones sucesivas:

$$Pr\left\{E_1E_2\right\} = Pr\left\{E_1\right\} * Pr\left\{E_2\right\} = \frac{1}{4} * \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

---

[1] después de cada extracción se anota el resultado y se devuelve la carta a la baraja

1.5.2. Sucesos dependientes

Un suceso es E_2es dependiente de otro suceso E_1, si la ocurrencia del suceso E_1 influye en la realización del evento E_2.

La probabilidad de un suceso compuesto dependiente es el producto de las probabilidades los sucesos que lo forman, es decir,

$$Pr\left\{E_1E_2E_3\ldots E_n\right\} = Pr\left\{E_1\right\} * Pr\left\{E_2|E_1\right\} * Pr\left\{E_3|E_2E_1\right\} * \ldots$$

Ejemplo:

Preg.- De una baraja de 52 cartas se extraen sin reposición[2] y en forma sucesiva dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos cartas sean exactamente trébol($\clubsuit$)?

Resp.-

1. Calcular el espacio muestral:

$$U = \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} A\heartsuit & 2\heartsuit & 3\heartsuit & 4\heartsuit & 5\heartsuit & 6\heartsuit & 7\heartsuit & 8\heartsuit & 9\heartsuit & 10\heartsuit & J\heartsuit & Q\heartsuit & K\heartsuit \\ A\clubsuit & 2\clubsuit & 3\clubsuit & 4\clubsuit & 5\clubsuit & 6\clubsuit & 7\clubsuit & 8\clubsuit & 9\clubsuit & 10\clubsuit & J\clubsuit & Q\clubsuit & K\clubsuit \\ A\diamondsuit & 2\diamondsuit & 3\diamondsuit & 4\diamondsuit & 5\diamondsuit & 6\diamondsuit & 7\diamondsuit & 8\diamondsuit & 9\diamondsuit & 10\diamondsuit & J\diamondsuit & Q\diamondsuit & K\diamondsuit \\ A\spadesuit & 2\spadesuit & 3\spadesuit & 4\spadesuit & 5\spadesuit & 6\spadesuit & 7\spadesuit & 8\spadesuit & 9\spadesuit & 10\spadesuit & J\spadesuit & Q\spadesuit & K\spadesuit \end{array} \right\}$$

2. Determinar E_1y E_2:
   E_1: Obtener un trébol($\clubsuit$).
   E_2: Obtener un trébol($\clubsuit$).

3. Calcular los casos de éxito para E_1:

$$E_1 = \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} A\clubsuit & 2\clubsuit & 3\clubsuit & 4\clubsuit & 5\clubsuit & 6\clubsuit & 7\clubsuit & 8\clubsuit & 9\clubsuit & 10\clubsuit & J\clubsuit & Q\clubsuit & K\clubsuit \end{array} \right\}$$

4. Calcular la probabilidad de E_1:

$$Pr\left\{E_1\right\} = \frac{h}{n} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

5. Calcular la probabilidad de E_2sabiendo que E_1 ya se ha dado. Después de la primera extracción el espacio muestral ha sido modificado; ahora existen 51 cartas en la baraja y 12 cartas de trébol ($\clubsuit$):

$$Pr\left\{E_2|E_1\right\} = \frac{h}{n} = \frac{12}{51}$$

6. Calcular la probabilidad de obtener dos cartas de trébol en dos extracciones sucesivas:

$$Pr\left\{E_1E_2\right\} = Pr\left\{E_1\right\} * Pr\left\{E_2|E_1\right\} = \frac{1}{4} * \frac{12}{51} = \frac{12}{204} = \frac{1}{17}$$

---

[2] después de cada extracción se anota el resultado y se no devuelve la carta a la baraja

1.6. Sucesos excluyentes

1.6.1. Sucesos mutuamente excluyentes

Siendo E_1y E_2 dos sucesos cualesquiera del mismo experimento, la probabilidad de que solo uno de ellos se dieran es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos.

$$Pr\{E_1 + E_2\} = Pr\{E_1\} + Pr\{E_2\}$$

La ocurrencia de un de los sucesos implica la no ocurrencia del otro, de ahí el nombre de mutuamente excluyentes.

Ejemplo:

Preg.- De una baraja de 52 ¿Cuál es la probabilidad de obtener un corazón($\heartsuit$) o un diamante($\diamondsuit$)?
Resp.-

1. Calcular el espacio muestral:

$$U = \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} A\heartsuit & 2\heartsuit & 3\heartsuit & 4\heartsuit & 5\heartsuit & 6\heartsuit & 7\heartsuit & 8\heartsuit & 9\heartsuit & 10\heartsuit & J\heartsuit & Q\heartsuit & K\heartsuit \\ A\clubsuit & 2\clubsuit & 3\clubsuit & 4\clubsuit & 5\clubsuit & 6\clubsuit & 7\clubsuit & 8\clubsuit & 9\clubsuit & 10\clubsuit & J\clubsuit & Q\clubsuit & K\clubsuit \\ A\diamondsuit & 2\diamondsuit & 3\diamondsuit & 4\diamondsuit & 5\diamondsuit & 6\diamondsuit & 7\diamondsuit & 8\diamondsuit & 9\diamondsuit & 10\diamondsuit & J\diamondsuit & Q\diamondsuit & K\diamondsuit \\ A\spadesuit & 2\spadesuit & 3\spadesuit & 4\spadesuit & 5\spadesuit & 6\spadesuit & 7\spadesuit & 8\spadesuit & 9\spadesuit & 10\spadesuit & J\spadesuit & Q\spadesuit & K\spadesuit \end{array} \right\}$$

2. Determinar E_1y E_2:
   E_1: Obtener un corazón($\heartsuit$).
   E_2: Obtener un diamante($\diamondsuit$).

3. Calcular los casos de éxito para E_1:

$$E_1 = \{\ A\heartsuit \quad 2\heartsuit \quad 3\heartsuit \quad 4\heartsuit \quad 5\heartsuit \quad 6\heartsuit \quad 7\heartsuit \quad 8\heartsuit \quad 9\heartsuit \quad 10\heartsuit \quad J\heartsuit \quad Q\heartsuit \quad K\heartsuit\ \}$$

4. Calcular los casos de éxito para E_2:

$$E_2 = \{\ A\diamondsuit \quad 2\diamondsuit \quad 3\diamondsuit \quad 4\diamondsuit \quad 5\diamondsuit \quad 6\diamondsuit \quad 7\diamondsuit \quad 8\diamondsuit \quad 9\diamondsuit \quad 10\diamondsuit \quad J\diamondsuit \quad Q\diamondsuit \quad K\diamondsuit\ \}$$

5. Calcular la probabilidad de E_1:

$$Pr\{E_1\} = \frac{h}{n} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

6. Calcular la probabilidad de E_2:

$$Pr\{E_2\} = \frac{h}{n} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

7. Calcular la probabilidad de obtener una carta de corazón o una carta de diamante:

$$Pr\{E_1 + E_2\} = Pr\{E_1\} + Pr\{E_2\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

1.6.2. Sucesos no mutuamente excluyentes

Siendo E_1y E_2 dos sucesos cualesquiera, la probabilidad de que uno o los dos se dieran al mismo mismo tiempo es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos, menos la probabilidad de la intersección de ambos.

$$Pr\left\{E_1+E_2\right\}=Pr\left\{E_1\right\}+Pr\left\{E_2\right\}-Pr\left\{E_1\cap E_2\right\}$$

La ocurrencia de un de los sucesos no garantiza la no ocurrencia del otro, es posible que los dos sucesos se den al mismo tiempo.

Ejemplo:

Preg.- De una baraja de 52 ¿Cuál es la probabilidad de obtener un corazón($\heartsuit$) o un 2?
Resp.-

1. Calcular el espacio muestral:

$$U=\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} A\heartsuit & 2\heartsuit & 3\heartsuit & 4\heartsuit & 5\heartsuit & 6\heartsuit & 7\heartsuit & 8\heartsuit & 9\heartsuit & 10\heartsuit & J\heartsuit & Q\heartsuit & K\heartsuit \\ A\clubsuit & 2\clubsuit & 3\clubsuit & 4\clubsuit & 5\clubsuit & 6\clubsuit & 7\clubsuit & 8\clubsuit & 9\clubsuit & 10\clubsuit & J\clubsuit & Q\clubsuit & K\clubsuit \\ A\diamondsuit & 2\diamondsuit & 3\diamondsuit & 4\diamondsuit & 5\diamondsuit & 6\diamondsuit & 7\diamondsuit & 8\diamondsuit & 9\diamondsuit & 10\diamondsuit & J\diamondsuit & Q\diamondsuit & K\diamondsuit \\ A\spadesuit & 2\spadesuit & 3\spadesuit & 4\spadesuit & 5\spadesuit & 6\spadesuit & 7\spadesuit & 8\spadesuit & 9\spadesuit & 10\spadesuit & J\spadesuit & Q\spadesuit & K\spadesuit \end{array}\right\}$$

2. Determinar E_1y E_2:
   E_1: Obtener un corazón($\heartsuit$).
   E_2: Obtener un 2.

3. Calcular los casos de éxito para E_1:

$$E_1=\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} A\heartsuit & 2\heartsuit & 3\heartsuit & 4\heartsuit & 5\heartsuit & 6\heartsuit & 7\heartsuit & 8\heartsuit & 9\heartsuit & 10\heartsuit & J\heartsuit & Q\heartsuit & K\heartsuit \end{array}\right\}$$

4. Calcular los casos de éxito para E_2:

$$E_2=\left\{\begin{array}{c} 2\heartsuit \\ 2\clubsuit \\ 2\diamondsuit \\ 2\spadesuit \end{array}\right\}$$

5. Calcular la probabilidad de E_1:

$$Pr\left\{E_1\right\}=\frac{h}{n}=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

6. Calcular la probabilidad de E_2:

$$Pr\left\{E_2\right\}=\frac{h}{n}=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$

7. Calcular la intersección de los sucesos E_1 y E_2:

$$E_1\cap E_2=\{2\heartsuit\}$$

   Si la intersección es nula, se tratan de sucesos mutuamente excluyentes.

8. Calcular la probabilidad de $E_1 \cap E_2$:

$$Pr\{E_1 \cap E_2\} = \frac{h}{n} = \frac{1}{52} = \frac{1}{52}$$

9. Calcular la probabilidad de obtener una carta de corazón o una carta con el valor 2:

$$Pr\{E_1 + E_2\} = Pr\{E_1\} + Pr\{E_2\} - Pr\{E_1 \cap E_2\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{13} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

1.7. Análisis combinatorio

Es la rama de la matemática que estudia los diversos arreglos o selecciones que podemos formar con los elementos de un conjunto dado, los cuales nos permite resolver muchos problemas prácticos. Por ejemplo podemos averiguar cuántos números diferentes de teléfonos , placas o loterías se pueden formar utilizando un conjunto dado de letras y dígitos.

Además el estudio y comprensión del análisis combinatorio no va ha servir de andamiaje para poder resolver y comprender problemas sobre probabilidades.

1.7.1. Factorial

Para todo número natural n, se llama n factorial o factorial de n al producto de todos los naturales entre n y 1:

$$n! = n * (n-1) * (n-2) * (n-3) * \ldots * 1$$

Se define al factorial de $0! = 1$.

Los factoriales se usan mucho en la rama de la matemática llamada combinatoria.

Ejemplo:

Preg.- Calcular el factorial de 5.
Resp.-
$5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1$.
$5! = 120$.

1.7.2. Permutaciones

Dado un conjunto de n elementos, se llama una permutación de n objetos tomados de r en r, colocados en un determinado orden.

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$_nP_n = n!$$

Ejemplo:

Preg.- Se tiene 7 libros y solo 3 espacios en una biblioteca, y se quiere calcular de cuántas maneras se pueden colocar 3 libros elegidos; entre los siete dados.

Resp.-

1. Número total de objetos.
   $n = 7$.
2. Cantidad para cada permutación:
   $r = 3$.
3. Calcular la permutación de 7 libros en 3 lugares.

$$_7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{5040}{24} = 210$$

1.7.3. Combinaciones

Dado un conjunto de n objetos, se llama una combinación de n elementos tomados de r en r, en el que importan los objetos más no el orden de colocación de ellos.

$$_nC_r = \left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array} \right) = \frac{n!}{r! * (n-r)!}$$

Ejemplo:

Preg.- Una señorita desea invitar a cenar a 5 de 11 amigos que tiene, ¿cuántas maneras tiene de invitarlos?

Resp.-

1. Número total de objetos.
   $n = 11$.
2. Cantidad para cada combinación:
   $r = 5$.
3. Calcular la combinación de 11 amigos en 5 invitados.

$$_{11}C_5 = \frac{11!}{5! * (11-5)!} = \frac{11!}{5! * 6!} = \frac{39916800}{120 * 720} = \frac{39916800}{86400} = 462$$

Capítulo 2

Distribución de probabilidades

2.1. Definición

Si para cada valor de la variable X, considerado como un suceso, podemos calcular su respectiva probabilidad, obtenemos una función que se denomina Función de Distribución de Probabilidad de la Variable Aleatoria X. Su regla de correspondencia es un enunciado, una formula o una tabla que haga correspondes cada valor de X con su respectiva probabilidad.

Es importante tener en cuenta que la suma de todas las probabilidad es igual a 1.

Ejemplo:

Preg.- En el experimento de lanzar tres monedas al aire, sea la variable aleatoria X que designa el número de caras que se puede obtener en cualquier resultado del experimento. Calcular construir la distribución de probabilidades.

Resp.-

1. Calcular el espacio muestral:

$$U = \{\ CCC \quad CCS \quad CSC \quad SCC \quad SSC \quad SCS \quad CSS \quad SSS\ \}$$

2. Calcular los valores de la variable aleatoria X:

$$\begin{array}{ccc} U & & X \\ CCC & \Rightarrow & 3 \\ CCS & \Rightarrow & 2 \\ CSC & \Rightarrow & 2 \\ SCC & \Rightarrow & 2 \\ SSC & \Rightarrow & 1 \\ SCS & \Rightarrow & 1 \\ CSS & \Rightarrow & 1 \\ SSS & \Rightarrow & 0 \end{array}$$

Los valores X no se puede repetir, por lo tanto los valores para X son:

$$X = \{\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\ \}$$

El orden de los valores de X no importa.

3. Calcular la probabilidad para cada valor de X:

    a) Para $X = 0$:

    $$Pr\,(0) = \frac{h}{n} = \frac{1}{8}$$

    b) Para $X = 1$:

    $$Pr\,(1) = \frac{h}{n} = \frac{3}{8}$$

    c) Para $X = 2$:

    $$Pr\,(2) = \frac{h}{n} = \frac{3}{8}$$

    d) Para $X = 3$:

    $$Pr\,(3) = \frac{h}{n} = \frac{1}{8}$$

4. Construir la distribución de probabilidad:

X	$Pr\,(X)$
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$

Se debe recordar que la suma de todas las probabilidades debe ser siempre 1:

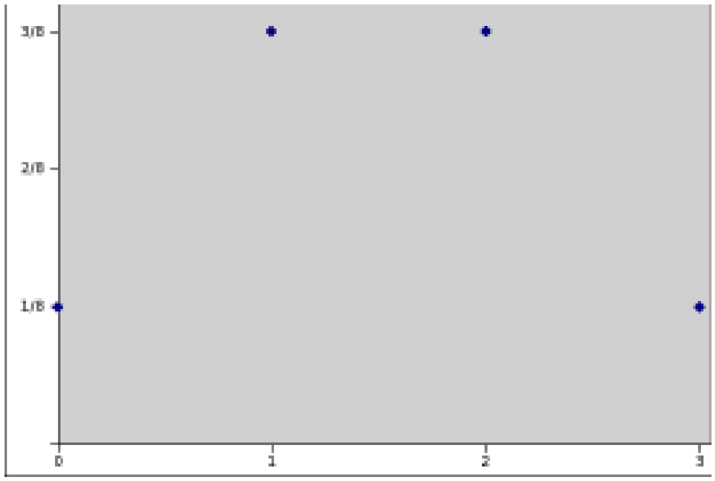
$$\sum_{i=1}^{4} Pr(X_i) = Pr(X_1) + Pr(X_2) + Pr(X_3) + Pr(X_4)$$

$$\sum_{i=1}^{4} Pr(X_i) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

2.2. Gráfica

A partir de los valores de X y sus respectivas probabilidades es fácil representar la distribución de probabilidad en un sistema ejes coordenados, donde la horizontal tendrá los valores de X y en la vertical las probabilidades Pr.

La gráfica para la distribución del ejemplo anterior es:



2.3. Media teórica o Esperanza matemática

Es la media ponderada de los posibles valores de una variable aleatoria X. Dependiendo del autor se suele representar por μ, μ_x o E.

$$\mu = \mu_x = E = \sum_{i=1}^{n} X_i * Pr\left(X_i\right)$$

Ejemplo:

Preg.- Calcular la media teórica para el ejemplo de la sección 2.1.
Resp.-

$$\mu = \sum_{i=1}^{4} X_i * Pr\left(X_i\right) = X_1 * Pr\left(X_1\right) + X_2 * Pr\left(X_2\right) + X_3 * Pr\left(X_3\right) + X_4 * Pr\left(X_4\right)$$

$$\mu = 0 * \frac{1}{8} + 1 * \frac{3}{8} + 2 * \frac{3}{8} + 3 * \frac{1}{8}$$

$$\mu = 0 + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8}$$

$$\mu = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

2.4. Varianza

Es la media de la dispersión de una variable aleatoria X. Se puede representar por σ^2, σ_x^2 o Var.

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 = Var = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 * Pr\left(X_i\right)\right) - \mu^2$$

Ejemplo:

Preg.- Calcular la varianza para el ejemplo de la sección 2.1.
Resp.-

$$\sigma^2 = \left(\sum_{i=1}^{4} X_i^2 * Pr\left(X_i\right) \right) - \mu^2$$

$$\sigma^2 = X_1^2 * Pr\left(X_1\right) + X_2^2 * Pr\left(X_2\right) + X_3^2 * Pr\left(X_3\right) + X_4^2 * Pr\left(X_4\right) - \mu^2$$

$$\sigma^2 = 0^2 * \frac{1}{8} + 1^2 * \frac{3}{8} + 2^2 * \frac{3}{8} + 3^2 * \frac{1}{8} - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\sigma^2 = 0 * \frac{1}{8} + 1 * \frac{3}{8} + 4 * \frac{3}{8} + 9 * \frac{1}{8} - \frac{9}{4}$$

$$\sigma^2 = 0 + \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} - \frac{9}{4}$$

$$\sigma^2 = \frac{24}{8} - \frac{9}{4} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{12-9}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

2.5. Desviación típica o estándar

La varianza se expresa en unidades de segundo grado, en muchos casos es necesario tener una medida de dispersión de primer grado, esto es la desviación estándar.

$$\sigma = \sigma_x = \sqrt{Var}$$

Ejemplo:

Preg.- Calcular la media teórica para el ejemplo de la sección 2.1.
Resp.-

$$\sigma = \sqrt{Var} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$$

2.6. Distribución Binomial

La distribución binomial fue desarrollada por Jakob Bernoulli (Suiza 1654-1705), es la principal distribución de probabilidad discreta.

La distribución binomial proviene de experimentos que solo tienen dos posibles resultados, a los que se les puede nombrar como éxito o fracaso, consiste de varias pruebas y en cada una la probabilidad de éxito es la misma, por lo que son independientes.

Para construir una distribución bonimial es necesario conocer el número de pruebas que se repiten y la probabilidad de que suceda un éxito en cada una de ellas. La fórmula que describe la distribución binomial es la siguiente:

$$Pr\left(X\right) = \left(\begin{array}{c} N \\ X \end{array} \right) * p^X * q^{N-X} = \frac{N!}{X! * (N-X)!} * p^X * q^{N-X}$$

N es el número de pruebas.

X es el número de éxitos.

p es la probabilidad de obtener un éxito.

q es la probabilidad de obtener un fracaso ($q = 1 - p$).

2.6.1. Media

$$\mu = N * p$$

2.6.2. Varianza

$$\sigma^2 = N * p * q$$

2.6.3. Desviación típica o estándar

$$\sigma = \sqrt{N * p * q}$$

Ejemplo:

Preg.- El experimento consiste en lanzar cuatro veces al aire una moneda. Nuestro interés es el número de caras en los cuatro lanzamientos. Como es evidente, la probabilidad de obtener un éxito (cara), en una de las pruebas (lanzamientos) es 0.50.

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una cara en los cuatro lanzamientos?
2. ¿Cuál es la probabilidad de no obtener caras en los cuatro lanzamientos?
3. Calcular la media.

Resp.-

1. Como tenemos 4 pruebas ($N = 4$), esperamos un éxito ($X = 1$) y la probabilidad de éxito es 0.50 ($p = 0{,}50$ y $q = 1 - p = 1 - 0{,}50 = 0{,}50$). Aplicando la fórmula tenemos:

$$Pr\left(X\right) = \frac{N!}{X! * (N - X)!} * p^X * q^{N-X}$$

$$Pr\left(1\right) = \frac{4!}{1! * (4 - 1)!} * 0{,}50^1 * 0{,}50^{4-1}$$

$$Pr\left(1\right) = \frac{4!}{1 * (3)!} * 0{,}50 * 0{,}50^3$$

$$Pr\left(1\right) = \frac{4!}{3!} * 0{,}50^4$$

$$Pr\left(1\right) = \frac{24}{6} * 0{,}0625$$

$$Pr\left(1\right) = 4 * 0{,}0625$$

$$Pr\left(1\right) = 0{,}25$$

2. De la misma manera tenemos 4 pruebas ($N = 4$), esperamos cero éxitos ($X = 0$) y la probabilidad de éxito es 0.50 ($p = 0{,}50$ y $q = 0{,}50$). Aplicando la fórmula tenemos:

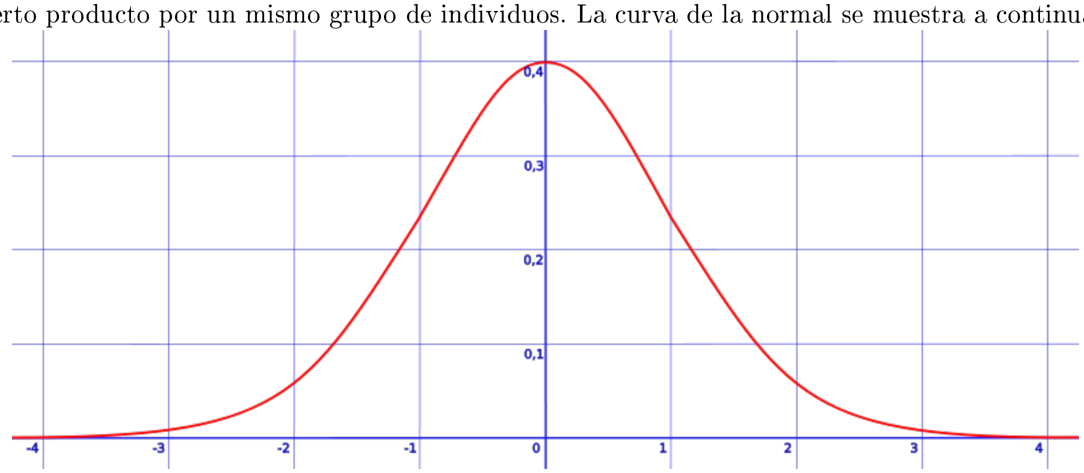
$$Pr\,(X) = \frac{N!}{X! * (N-X)!} * p^X * q^{N-X}$$
$$Pr\,(0) = \frac{4!}{0! * (4-0)!} * 0{,}50^0 * 0{,}50^{4-0}$$
$$Pr\,(0) = \frac{4!}{1 * (4)!} * 1 * 0{,}50^4$$
$$Pr\,(0) = \frac{4!}{4!} * 0{,}50^4$$
$$Pr\,(0) = \frac{24}{24} * 0{,}0625$$
$$Pr\,(0) = 1 * 0{,}0625$$
$$Pr\,(0) = 0{,}0625$$

3. La media es igual a:

$$\mu = N * p$$
$$\mu = 4 * 0{,}50$$
$$\mu = 2$$

2.7. Distribución Normal

La distribución Normal, también llamada distribución de Gauss o distribución gaussiana, es una distribución contínua, es la distribución de probabilidad que con más frecuencia aparece en estadística y teoría de probabilidades. Esto se debe a que su función de densidad es simétrica y con forma de campana, lo que favorece su aplicación como modelo a un gran número de variables estadísticas, como ser: caracteres fisiológicos como el efecto de un fármaco, caracteres sociológicos como el consumo de cierto producto por un mismo grupo de individuos. La curva de la normal se muestra a continuación.



El área debajo de la curva es 1.

Para calcular la probabilidad para un valor de la variable aleatoria en un distribución normal es necesario conocer la media y desviación típica. La fórmula que describe la distribución normal es la siguiente:

$$Pr(X) = \frac{1}{\sigma * \sqrt{2 * \pi}} * e^{-\dfrac{(X-\mu)^2}{2 * \sigma^2}}$$

2.7.1. Distribución normal estándar

Cuando $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, la distribución normal se conoce con el nombre de normal estándar. DEfinimos una nueva variable aleatoria Z, que depende de X.

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Es a partir de esta nueva variable que se calcula la probabilidad mediante la siguiente fórmula:

$$Pr(Z) = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * e^{-\dfrac{1}{2} * Z^2}$$

Ejemplo:

Preg.- Un un examen de estadñistica, la calificación media fue 72 y la desviación típica 15. Determina la distribución normal estándar para las puntuaciones de los alumnos que obtuvieron 60.

Resp.-

1. Como se trata de una normal estándar, calculamos Z:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$Z = \frac{60-72}{15} = -\frac{12}{15} = -0{,}8$$

2. Calculamos el valor para $Pr(-0{,}8)$:

$$Pr(Z) = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * e^{-\dfrac{1}{2} * Z^2}$$
$$Pr(-0{,}8) = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * e^{-\dfrac{1}{2} * (-0{,}8)^2}$$
$$Pr(-0{,}8) = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * e^{-\dfrac{1}{2} * 0{,}64}$$
$$Pr(-0{,}8) = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * e^{-0{,}32}$$
$$Pr(-0{,}8) = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * 0{,}73$$
$$Pr(-0{,}8) = \frac{0{,}73}{\sqrt{6{,}28}}$$
$$Pr(-0{,}8) = \frac{0{,}73}{2{,}51}$$
$$Pr(-0{,}8) = 0{,}29$$

2.7.2. Media

$$\mu = \lambda$$

2.7.3. Varianza

$$\sigma^2 = \lambda$$

2.8. Distribución de Poisson

La distribución de Poisson fue descubierta por Siméon-Denis Poisson (1781-1840) quien publicó, junto con su teoría de probabilidad, en 1838 en su tr abajo "Investigación sobre la probabilidad de los juicios en materias criminales y civiles".

La distribución de Poisson es una distribución discreta. Expresa la probabilidad de un número de eventos ocurriendo en un tiempo fijo si estos ocurren con una tasa media conocida, y son independientes del tiempo desde el último evento.

Si el número esperado de ocurrencias en este intervalo es λ, entonces la probabilidad de que haya exactamente X ocurrencias es igual a:

$$Pr(X) = \frac{\lambda^X * e^{-\lambda}}{X!}$$

2.8.1. Media

$$\mu = \lambda$$

2.8.2. Varianza

$$\sigma^2 = \lambda$$

Ejemplo:

Preg.- Supóngase que estamos investigando la seguridad de un crucero muy peligroso. Los archivos de la policía indican una media de cinco accidentes por mes en él. La división de seguridad en carreteras quiere calcular la probabilidad de exactamente 0 accidentes en un mes determinado.

Resp.-

1. La media de los accidentes es 5:

$$\lambda = 5$$

2. El valor de X es 0:

$$X = 0$$

3. Calculamos la probabilidad con la fórmula de Poisson:

$$Pr(X) = \frac{\lambda^X * e^{-\lambda}}{X!}$$
$$Pr(0) = \frac{5^0 * e^{-5}}{0!}$$
$$Pr(X) = \frac{1 * 0{,}0067}{1}$$
$$Pr(X) = 0{,}0067$$

Índice general